

Нахождение минимального расстояния между двумя плоскими гладкими кривыми в трехмерном пространстве

Аббасов М.Э.

Санкт-Петербургский Государственный Университет

VIII Московская международная конференция по Исследованию Операций
(ORM 2016)

19.10.2016

Метод заряженных шариков

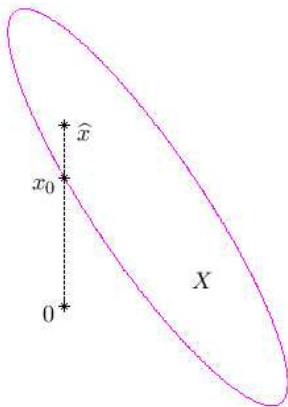


Рис.: Поиск минимального расстояния от точки до выпуклого гладкого множества

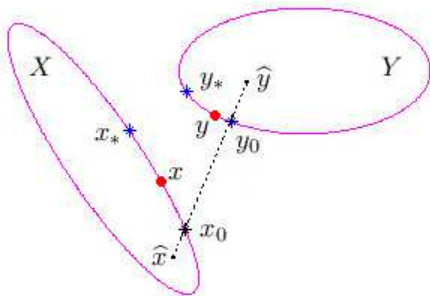


Рис.: Поиск минимального расстояния между двумя выпуклыми гладкими множествами

- М. Э. Аббасов. *Метод заряженных шариков* //Семинар по конструктивному негладкому анализу и недифференцируемой оптимизации "CNSA & NDO": <http://www.apmath.spbu.ru/cnsa/>

Постановка задачи

Рассмотрим в \mathbb{R}^3 кривые

$$r_1(u) = (x_1(u), y_1(u), z_1(u)), \quad r_2(v) = (x_2(v), y_2(v), z_2(v))$$

где $r_1, r_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ – непрерывно дифференцируемые вектор-функции, скалярных параметров u и v соответственно. Будем искать точки

$$r_1^* = (x_1(u_*), y_1(u_*), z_1(u_*)), \quad r_2^* = (x_2(v_*), y_2(v_*), z_2(v_*))$$

на которых достигается минимальное расстояние между данными кривыми.

Уравнения движения

Касательные к кривым

$$\tau_1(u) = \frac{dr_1(u)}{du} \Big/ \left\| \frac{dr_1(u)}{du} \right\|, \quad \tau_2(v) = \frac{dr_2(v)}{dv} \Big/ \left\| \frac{dr_2(v)}{dv} \right\|.$$

Силы Кулона

для первого и второго шарика, с точностью до некоторой константы равны соответственно $\frac{r_2 - r_1}{\|r_2 - r_1\|^3}$, $-\frac{r_2 - r_1}{\|r_2 - r_1\|^3}$

Сила вязкого трения, $i = 1, 2$

для i -ого шарика с точностью до константы равна $-\frac{dr_i}{dt}$

Уравнения движения

С помощью второго закона Ньютона уравнения движения можно записать в виде

$$\begin{cases} \frac{d^2 r_1}{dt^2} = c_1 \left\langle \frac{r_2 - r_1}{\|r_2 - r_1\|^3}, \tau_1 \right\rangle \tau_1 - c_2 \frac{dr_1}{dt} \\ \frac{d^2 r_2}{dt^2} = c_1 \left\langle \frac{r_1 - r_2}{\|r_2 - r_1\|^3}, \tau_2 \right\rangle \tau_2 - c_2 \frac{dr_2}{dt} \end{cases} \quad (1)$$

Здесь c_1, c_2 константы. Можно (1) переписать в виде

$$\begin{cases} \ddot{u} \frac{dr_1}{du} + \dot{u}^2 \frac{d^2 r_1}{du^2} + c_2 \dot{u} \frac{dr_1}{du} = c_1 \left\langle \frac{r_2 - r_1}{\|r_2 - r_1\|^3}, \tau_1 \right\rangle \tau_1 \\ \ddot{v} \frac{dr_2}{dv} + \dot{v}^2 \frac{d^2 r_2}{dv^2} + c_2 \dot{v} \frac{dr_2}{dv} = c_1 \left\langle \frac{r_1 - r_2}{\|r_2 - r_1\|^3}, \tau_2 \right\rangle \tau_2 \end{cases} \quad (2)$$

Уравнения движения

Так как $\langle \tau_1 \tau_1 \rangle = 1$, то

$$2 \left\langle \frac{d\tau_1}{du} \tau_1 \right\rangle = 0.$$

Таким образом $n_1 = \frac{d\tau_1}{du}$ ортогонально τ_1 . С другой стороны очевидно, что n_1 лежит в соприкасающейся плоскости кривой (то есть в нашем случае в плоскости, в которой лежит кривая). Поэтому n_1 есть главная нормаль нашей кривой. Аналогично $n_2 = \frac{d\tau_2}{dv}$ есть главная нормаль второй кривой. Трехгранники Френе для наших кривых определяются векторами:

- касательных $\tau_1(t)$, $\tau_2(t)$;
- главных нормалей $n_1(t)$, $n_2(t)$;
- бинормалей b_1 , b_2 (являющихся нормальями соответствующих плоскостей, в которых лежат кривые).

Уравнения движения

Скалярно умножая уравнения (2) слева и справа на соответствующие касательные направления, получаем систему

$$\begin{cases} \ddot{u} \left\| \frac{dr_1}{du} \right\| + \dot{u}^2 \left\langle \tau_1, \frac{d^2 r_1}{du^2} \right\rangle + c_2 \dot{u} \left\| \frac{dr_1}{du} \right\| = c_1 \left\langle \frac{r_2 - r_1}{\|r_2 - r_1\|^3}, \tau_1 \right\rangle \\ \ddot{v} \left\| \frac{dr_2}{dv} \right\| + \dot{v}^2 \left\langle \tau_2, \frac{d^2 r_2}{dv^2} \right\rangle + c_2 \dot{v} \left\| \frac{dr_2}{dv} \right\| = c_1 \left\langle \frac{r_1 - r_2}{\|r_2 - r_1\|^3}, \tau_2 \right\rangle \end{cases}$$

Уравнения движения

Вводя фиктивные переменные $\xi = \dot{u}$, $\eta = \dot{v}$, понижаем порядок системы

$$\begin{cases} \dot{u} = \xi \\ \dot{\xi} = c_1 \left\langle \frac{r_2 - r_1}{\|r_2 - r_1\|^3}, \tau_1 \right\rangle \left\| \frac{dr_1}{du} \right\|^{-1} - c_2 \xi - \left\langle \tau_1, \frac{d^2 r_1}{du^2} \right\rangle \left\| \frac{dr_1}{du} \right\|^{-1} \xi^2 \\ \dot{v} = \eta \\ \dot{\eta} = c_1 \left\langle \frac{r_1 - r_2}{\|r_2 - r_1\|^3}, \tau_2 \right\rangle \left\| \frac{dr_2}{dv} \right\|^{-1} - c_2 \eta - \left\langle \tau_2, \frac{d^2 r_2}{dv^2} \right\rangle \left\| \frac{dr_2}{dv} \right\|^{-1} \eta^2 \end{cases}$$

Переход к разностной схеме

Применяя к последней системе явный метод Эйлера с шагом δ , предполагая, что заданы u_k, ξ_k, v_k, η_k , получаем алгоритм решения исходной задачи

$$\begin{cases} u_{k+1} = u_k + \delta \xi_k \\ \xi_{k+1} = \xi_k + \delta \left(\phi_1(u_k, v_k) \left\| \frac{dr_1}{du} \right\|^{-1} - c_2 \xi_k - \psi_1(u_k) \left\| \frac{dr_1}{du} \right\|^{-1} \xi_k^2 \right) \\ v_{k+1} = v_k + \delta \eta_k \\ \eta_{k+1} = \eta_k + \delta \left(\phi_2(u_k, v_k) \left\| \frac{dr_2}{dv} \right\|^{-1} - c_2 \eta_k - \psi_2(v_k) \left\| \frac{dr_2}{dv} \right\|^{-1} \eta_k^2 \right) \end{cases}$$

Переход к разностной схеме

Здесь

$$\phi_1(u, v) = c_1 \left\langle \frac{r_2(u) - r_1(v)}{\|r_2(v) - r_1(u)\|^3}, \tau_1(u) \right\rangle,$$

$$\psi_1(u) = \left\langle \frac{d^2 r_1(u)}{du^2}, \tau_1(u) \right\rangle,$$

$$\phi_2(v, v) = c_1 \left\langle \frac{r_1(v) - r_2(u)}{\|r_2(v) - r_1(u)\|^3}, \tau_2(v) \right\rangle,$$

$$\psi_2(v) = \left\langle \frac{d^2 r_2(v)}{dv^2}, \tau_2(v) \right\rangle.$$

Критерий остановки

В точках r_1^* , r_2^* , являющихся решением, очевидно, касательная составляющая сил Кулона должна равняться нулю, поэтому в качестве критерия остановки можно взять условие

$$|\phi_1(u_k, v_k)| + |\phi_2(u_k, v_k)| \leq \varepsilon,$$

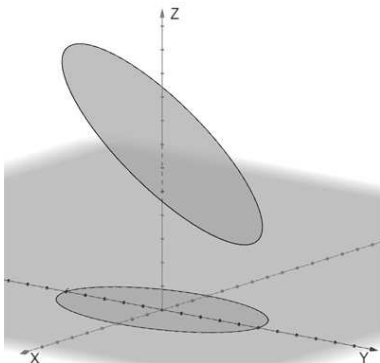
где $\varepsilon > 0$ некоторое малое число.

Численные эксперименты

Пример 1

Найдем расстояние между кривыми

$$r_1(u) = (3 \sin u, 5 \cos u, 0); \quad r_2(v) = (3 \sin v, 5 \cos v, 7 - 3.75 \cos v).$$



Численные эксперименты

Результаты при различных значениях параметров метода.

Таблица: Решение задачи из примера 1 при $\varepsilon = 10^{-6}$, $u_0 = 1$, $v_0 = 1$, $\xi_0 = 0$, $\eta_0 = 0$ и различных значениях параметра метода.

c_1	c_2	δ	N^a	$\ r_1 - r_1^*\ ^b$	$\ r_2 - r_2^*\ ^b$	t^c
100	2	0.1	212	$2.1 \cdot 10^{-8}$	$4.6 \cdot 10^{-8}$	0.0068
100	10	0.1	1268	$4.8 \cdot 10^{-7}$	$2.5 \cdot 10^{-7}$	0.0424
100	2	0.01	1815	$4.3 \cdot 10^{-7}$	$2.5 \cdot 10^{-7}$	0.0596
100	10	0.01	12732	$4.8 \cdot 10^{-7}$	$2.5 \cdot 10^{-7}$	0.3850
10	2	0.01	21793	$4.8 \cdot 10^{-6}$	$2.5 \cdot 10^{-6}$	0.6737
10	2	0.1	2175	$4.8 \cdot 10^{-6}$	$2.5 \cdot 10^{-6}$	0.0717

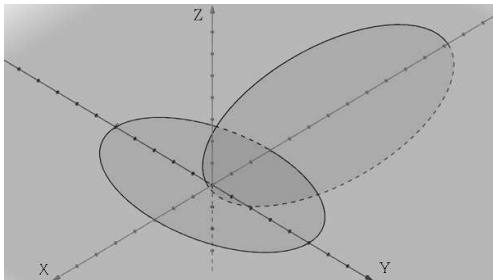
- ^a Количество итераций, ^b Расстояния до истинных решений,
^c Время работы алгоритма, с

Численные эксперименты

Пример 2

Найдем расстояние между кривыми

$$r_1(u) = (3 \sin u, 5 \cos u, 0); \quad r_2(v) = (6 \sin v - 6, 2 \cos v, -1.5 \cos v).$$



Численные эксперименты

Результаты при различных значениях параметров метода.

Таблица: Решение задачи из примера 2 при $\varepsilon = 10^{-4}$, $u_0 = 0$, $v_0 = 0$, $\xi_0 = 0$, $\eta_0 = 0$ и различных значениях параметра метода.

c_1	c_2	δ	N^a	$\ r_1 - r_1^*\ ^b$	$\ r_2 - r_2^*\ ^b$	t^c
100	10	0.1	114	$2.7 \cdot 10^{-7}$	$15.8 \cdot 10^{-7}$	0.0072
100	20	0.1	201	$4.7 \cdot 10^{-7}$	$7.7 \cdot 10^{-7}$	0.0099
100	20	0.01	2043	$8.5 \cdot 10^{-7}$	$11.7 \cdot 10^{-7}$	0.0628
200	20	0.1	93	$0.1 \cdot 10^{-7}$	$1.3 \cdot 10^{-7}$	0.0030

^a Количество итераций, ^b Расстояния до истинных решений,
^c Время работы алгоритма, с